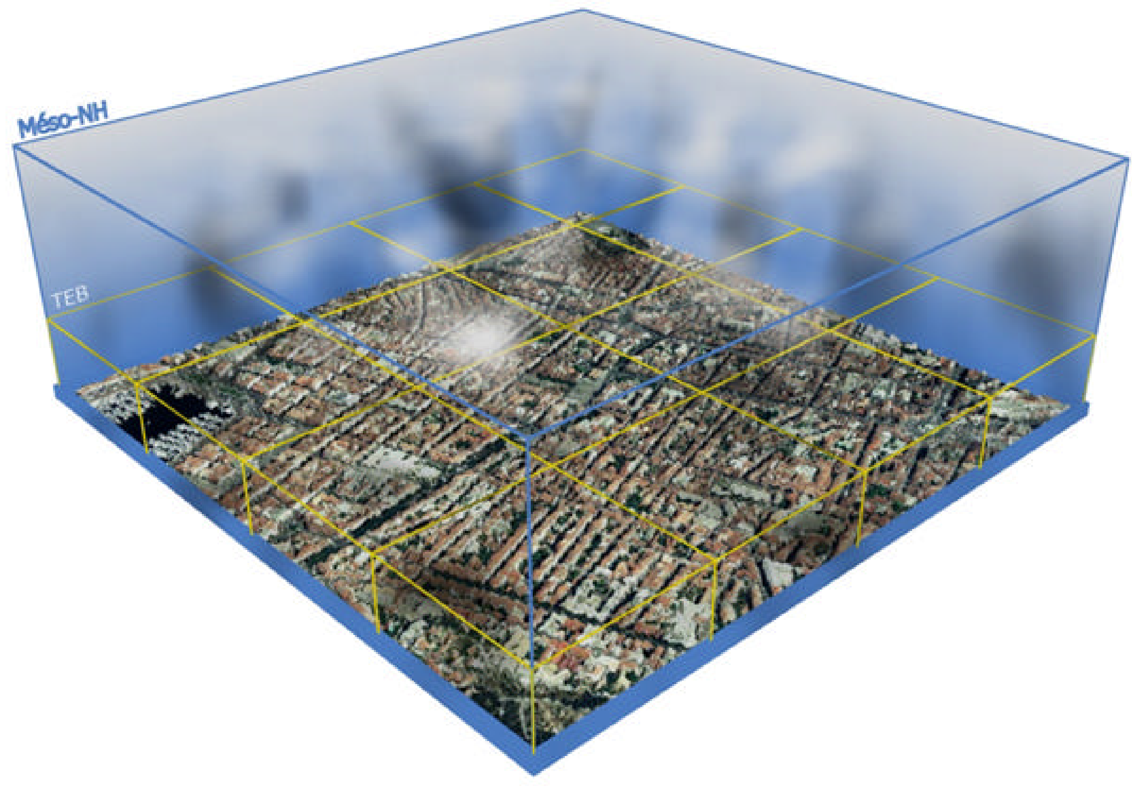
RUEL Clément
MADELEINE Jean-Baptiste
PCSI 1

Un exemple de modèle numérique de prévision du temps :

Le schéma de surface TEB



2002 - 2003

Sommaire

Note : Les mots soulignés sont expliqués dans le lexique.

On entend parler de modélisation aussi bien dans l'industrie aéronautique qu'en mécanique, dans l'industrie pharmaceutique, ou bien dans la météorologie : en quoi cela consiste-t-il ?

La modélisation a pour but simple de **reproduire le réel dans des conditions artificielles**, en l'occurrence **numériquement** par ordinateur. Il faut pour cela associer à des phénomènes physiques des **équations mathématiques** qui décrivent fidèlement l'évolution du système considéré. Dans notre cas, l'étude du climat, il est nécessaire d'avoir recours aux **équations de la thermodynamique pour les systèmes ouverts** : en effet le climat touche aussi bien les masses de gaz présentes dans l'atmosphère, que les particules en suspension, mais aussi les masses liquides somme toute majoritaires sur la surface du globe : c'est pourquoi l'on doit associer plusieurs modélisations, chacune pour leur domaine physico-chimique particulier. A défaut de pouvoir tout traiter simultanément , on a créé des modèles en interaction qui simulent les mouvements des masses d'air chaud et froid, les courants marins, les échanges de chaleur entre la terre et l'air ainsi que de nombreux autres phénomènes complémentaires.

Pour décrire un système aussi large que la surface du globe, les chercheurs ont imaginé un découpage en « boites » que l'on appelle **maillage**. A chacune de ces boites on associe des informations de l'état du sous-système calculées régulièrement suivant un **pas de temps**. Ainsi le modèle ne rend pas compte des évènements de taille inférieure à la dimension d'une maille, ou plus court que le pas de temps. La simulation du climat est dans un premier temps limité à un aperçu superficiel de son évolution. C'est pourquoi la démarche suivie pour construire ces modèles a été inductive : après avoir mis au point un modèle globale mondial qui reproduit fidèlement les phénomènes de grande ampleur, on peut le préciser en lui ajoutant ce que l'on appelle des **paramétrisations**.

Nous allons nous intéresser plus précisément à cette phase du processus dans notre étude, avec le **schéma de surface TEB** (Town Energy Balance) qui a pour objectif de simuler les **échanges d'énergie en milieu urbain**. Nous avons choisi d'analyser ce sous-modèle car les modèles globaux sont relativement inaccessibles du fait des multiples participations scientifiques mises en jeu, mais aussi de la complexité mathématique de ces simulations.

Nous aborderons donc dans un premier temps la **mise en équation des phénomènes climatiques**, puis les **principes généraux de la modélisation** ainsi que les **variables nécessaires**, et enfin la **simulation** en elle-même et ses résultats.

I Mise en équations

Le temps qu'il fait dépend de l'état dynamique, thermique et hygrométrique du fluide atmosphérique qui se trouve autour et au-dessus de nous. Par exemple le ciel sera nuageux si les couches horizontales de l'atmosphère sont saturées en humidité et chargées de gouttelettes d'eau. Cet état du fluide atmosphérique est décrit par un ensemble de **variables physiques** telles la pression, la température ou l'humidité et ces variables peuvent être reliées par des équations. En effet ce fluide atmosphérique est soumis à des **forces externes** (la force de gravité, la force de Coriolis, les frottements) **et internes** (différences de pression, force d'Archimède) et obéit aux lois physiques de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. On peut donc par le **déterminisme de la mécanique classique** connaître l'évolution du fluide si l'on connaît son état initial, et ce grâce à des équations différentielles aux dérivées partielles.

On distingue alors deux types d'équations : les **équations dynamiques** et les **équations physiques**.

1) Les équations dynamiques

Ce sont les équations générales d'évolution d'un fluide en équilibre hydrostatique : celles de Newton et de Navier-Stokes ainsi que l'équation d'état de l'air. Elles sont appelées en météorologie **équations primitives**.

Ces équations sont dîtes primitives car elles se limitent à l'évolution générale du fluide à l'échelle du globe. Cependant de très nombreux phénomènes physiques qui modifient l'évolution du fluide ne sont pas pris en compte par ces équations car ils sont plus locaux et invisibles pour le modèle global. Les variables des équations primitives (variables d'état de l'atmosphère, voir figure 1) vont alors être corrigées en tenant compte de ces phénomènes physiques locaux : il s'agit de la **paramétrisation**. La prise en compte de ces phénomènes locaux implique de nouvelles équations : les **équations physiques**.

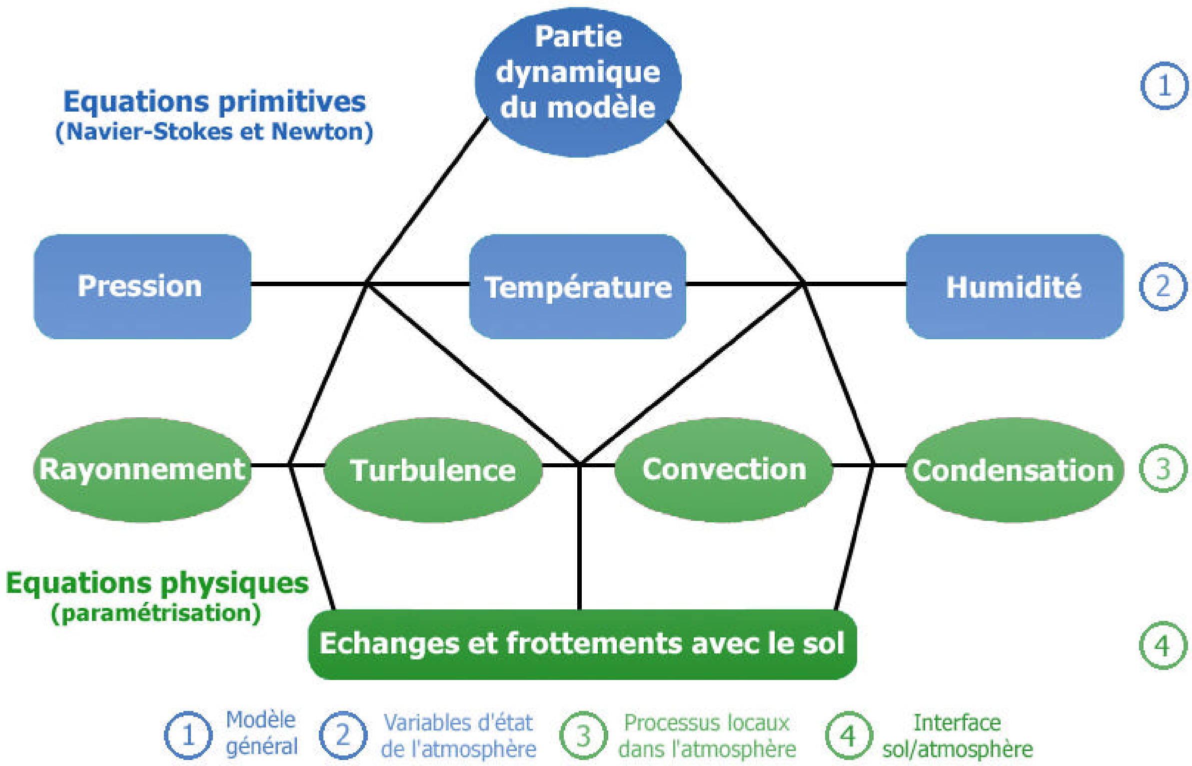


Figure 1 : Schéma conceptuel des phénomènes physiques introduits dans le modèle général.

2) Les équations physiques

De très nombreux phénomènes sont simulés grâce aux équations physiques :	Dates de mise en équation
- Les **effets de frottement** des masses d'air avec le sol qui évitent le creusement excessif des dépressions.	1962
- Le **cycle de l'eau** dans l'atmosphère et les échanges énergétiques associés. L'ajout de ces équations permet de décrire le transport de la vapeur d'eau et les changements de phase associés, le tout pour calculer les précipitations.	1962
- Les **mécanismes de transfert par turbulence** entre le sol et l'atmosphère, non seulement pour la quantité de mouvement, mais aussi pour la chaleur émise et la vapeur d'eau (voir le schéma de surface TEB).	1971-1978
- Les **apports énergétiques dus au rayonnement** pour tenir compte des effets du rayonnement sur les divers constituants de l'atmosphère, en particulier l'eau (effet d'absorption, de diffusion, de réémission du rayonnement). Ces effets diffèrent selon que l'atmosphère est claire ou nuageuse.	1966 1974
- Les **mouvements convectifs** résultants de l'instabilité verticale locale de l'atmosphère (en effet les équations primitives s'appliquent dans le cas d'un équilibre hydrostatique et ignorent donc ces mouvements convectifs).	1965 1974
- La dissipation d'énergie résultant du déferlement à haute altitude des **ondes de relief** (perturbation du mouvement des masses d'air due au relief).	1986

Le traitement détaillé des équations physiques a pris de plus en plus d'importance dans l'évolution des modèles numériques. A présent les modèles de prévision sont en majorité constitués d'équations physiques, plus nombreuses donc que les équations primitives.

Ainsi, les paramétrisations (corrections des variables des équations primitives) accumulées permettent aujourd'hui de **reproduire les cycles énergétiques et hydrologiques de façon satisfaisante** et de retrouver des valeurs correctes pour les flux qui y participent, comme le montrent les résultats du schéma de surface TEB qui seront explicités dans la dernière partie.

3) Résolution des équations

Les équations forment un système d'**équations non linéaires** qu'on ne peut résoudre analytiquement, d'où le recours au calcul numérique. Ainsi ces équations portant sur des variables continues vont être remplacées par des équations portant sur des **variables discrètes**, grâce à une modélisation en maillage de l'atmosphère qui sera étudiée dans la seconde partie. Les solutions seront ensuite obtenues par un algorithme approprié ; c'est ce qu'on appelle la **numérisation**.

Les résultats d'une prévision numérique dépendent donc des propriétés générales des solutions des équations, qui relèvent de la météorologie dynamique, ainsi que des **effets de la numérisation** adoptée, qui doit donc être étudiée en détail.

La complexité des algorithmes nécessite un outil de calcul puissant mais aussi pratique afin de pouvoir programmer les logiciels de prévision. C'est ainsi que les progrès de la prévision numérique ont été étroitement liés au développement des ordinateurs, depuis leur naissance en 1950 jusqu'aux actuels supercalculateurs, comme celui de Météo-France capable d'éxécuter 10^{11} opérations par seconde (voir photo 1).

Photo 1 : Le Fujitsu VPP 5000 installé en 1999 à Météo-France.

Mise en équations dans le cas du schéma de surface TEB

Le schéma de surface **TEB** (Town Energy Balance) modélise les échanges énergétiques et hydrologiques entre le sol et l'atmosphère en **milieu urbain**. Il est couplé au schéma de surface **ISBA** (Intéractions Sol-Biosphère-Atmosphère) de Noilhan et Planton (1989) qui modélise ces mêmes échanges mais pour des **surfaces naturelles**.

Cette étude qui se limite au schéma de surface TEB s'intéressera aux équations visant à la prévision de la **température au-dessus des rues**. Ceci permettra la modélisation de l'îlot de chaleur urbain et la prise en compte de son influence sur l'évolution de l'atmosphère.

1) Equation générale

Le schéma de surface TEB voit la ville comme un **ensemble de canyons**. Trois grands éléments urbains sont modélisés : **la route, les toits et les murs**. Afin de rendre compte des propriétés thermiques des matériaux artificiels, chacun de ces éléments est constitué de plusieurs couches (comme le montre la figure 2) dont les épaisseurs sont connues par le schéma de surface.

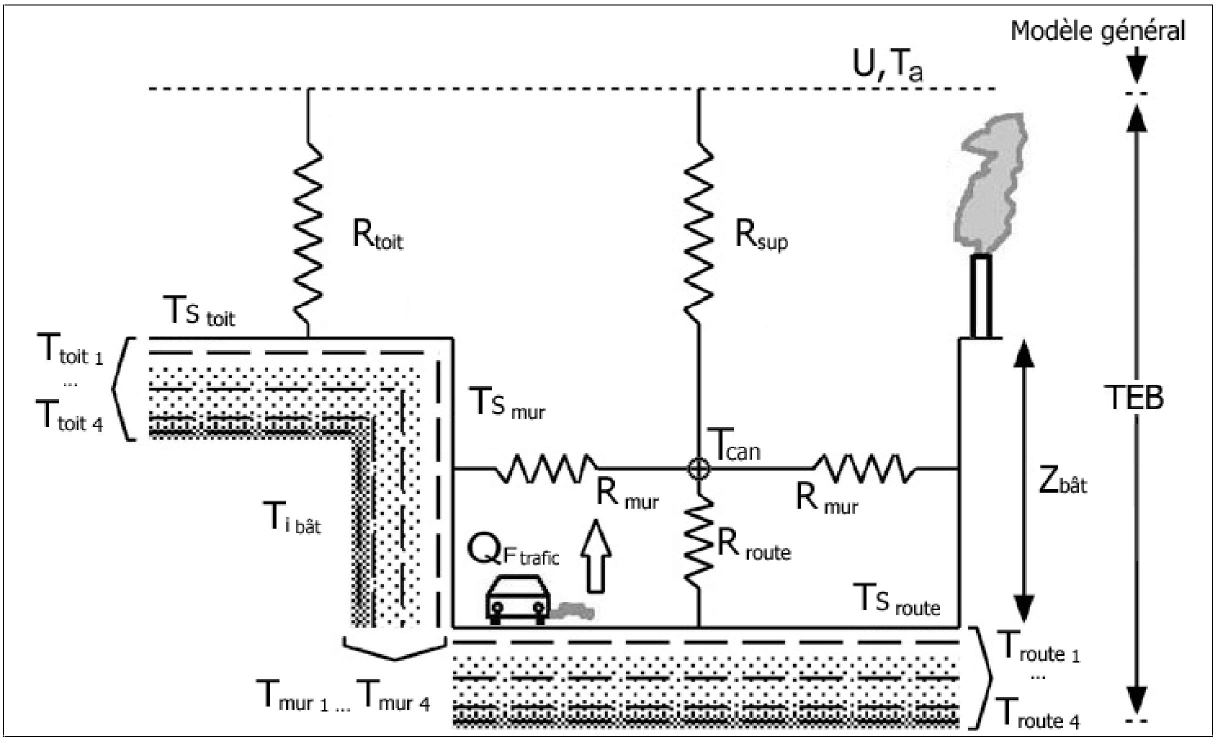


Figure 2 : Schéma de surface TEB (les différentes notations seront bientôt explicitées).

Dans le TEB, les températures et énergies de surface des murs et de la route ainsi que la température au-dessus de la rue influent sur la température à l'intérieur de la rue T_{can} (voir figure 2 ci-dessus) par l'intermédiaire de **résistances thermiques** (voir encadré page suivante) en obéissant à la relation suivante :

$$T_{can} = \frac{\dfrac{T_{Sroute}}{R_{route}} + \dfrac{2z_{bât}}{W}\dfrac{T_{Smur}}{R_{mur}} + \dfrac{T_a}{R_{\sup}} + \dfrac{Q_{Ftrafic}}{C_{pd}\rho_a(1-f_{toit})}}{\dfrac{1}{R_{route}} + \dfrac{2z_{bât}}{W}\dfrac{1}{R_{mur}} + \dfrac{1}{R_{\sup}}} \quad (1)$$

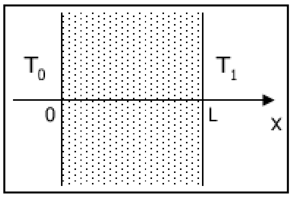
Les différentes notations sont :

C_{pd}	Capacité thermique de l'air	T_{Sroute} T_{Smur} T_a	Températures de surface de la route, des murs et température de l'air au-dessus de la rue
ρ_a	Densité de l'air	R_{route} R_{mur}	Résistance thermique entre la surface considérée (route ou mur) et l'air à l'intérieur du canyon
f_{toit}	Fraction de toits	$R_{\sup}$	Résistance thermique entre l'air à l'intérieur du canyon et l'air au-dessus du canyon
W	Largeur moyenne des rues	$Zb\hat{a}t$	Hauteur moyenne des bâtiments
$Q_{Ftrafic}$	Flux de chaleur sensible résultant du trafic		

Notion de résistance thermique

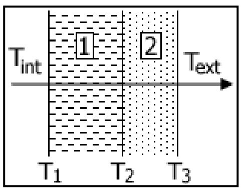
On observe, à cause de la différence de température entre les surfaces (comme les parois ou la route) et l'air de la rue, un phénomène appelé **transfert thermique conductif**. Il est de type **diffusif** et est dû à la non uniformité du champ de température, de la même façon que la diffusion de particules est due à l'hétérogénéité du nombre de particules. Ainsi, comme pour la diffusion où l'on écrivait la **loi de Fick** donnant le vecteur densité de courant de particules : $j_n = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$, avec D coefficient de diffusion, on peut écrire la **loi de Fourier** donnant le flux surfacique de conduction thermique : $j^{cd} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$, avec λ coefficient appelé conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$).

Si on suppose le **régime stationnaire**, c'est-à-dire ne dépendant pas explicitement du temps, la conservation du flux permet d'écrire $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 T}{dx^2} = 0$. Ainsi $\dfrac{dT}{dx} = A$ et $T(x) = Ax + B$.



Si le milieu est limité par deux parois en x=0 et x=L de températures respectives T_0 et T_1, les conditions aux limites imposent : $B = T_0$ et $A = \dfrac{T_1 - T_0}{L}$ (gradient de température). Ainsi $j^{cd} = -\lambda\dfrac{T_1 - T_0}{L}$ et le **flux thermique** à travers une section droite d'aire S est : $\Phi^{cd} = S \times j^{cd} = \dfrac{S\lambda}{L}(T_0 - T_1) = G_{th}^{cd}(T_0 - T_1)$ avec $G_{th}^{cd} = \dfrac{\lambda S}{L}$ **conductance thermique**. La **résistance** associée (appelé **résistance thermique**) est alors $\boxed{R_{th}^{cd} = \dfrac{1}{G_{th}^{cd}} = \dfrac{L}{\lambda S}}$.

Par analogie avec la conduction électrique (**loi de Fourier** : $j^{cd} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$ et **loi d'Ohm** : $j = -\sigma\dfrac{dv}{dx}$), on peut associer ces résistances en série ou en parallèle et simplifier le problème par le calcul de résistances équivalentes, comme cet étude le montrera bientôt dans le cas du TEB.



Pour simplifier, si on prend un mur constitué de plusieurs couches successives de conductivités thermiques différentes, la résistance équivalente pour le calcul du flux **surfacique** entrant sera égale à la sommes des résistances de chaque couche, alors placées en série. Ensuite pour le calcul du flux **total** d'un mur de surface S, ces résistances surfaciques seront mises en parallèle.

2) Calcul des résistances thermiques

R_{mur} dépend uniquement de la vitesse U_{eff} du vent à l'intérieur du canyon par la relation :

$$R_{mur} = C_{pd}\rho_a[11.8 + 4.2U_{eff}]^{-1} \quad \text{(2), où}$$

$$U_{eff} = \sqrt{U_{can}^2 + (u_* + \omega_*)^2}$$

La vitesse U_{eff} du vent dans le canyon est calculée dans la relation (2) grâce à la vitesse moyenne U_{can} du vent dans le canyon à laquelle on ajoute les termes u_* et ω_* pour rendre compte des perturbations dues aux échanges entre les parois et l'air dans le canyon.

u_* est un terme dynamique prenant en compte les turbulences et ω_* est la vitesse de convection ajoutée dans le cas de climats chauds. En effet la **production thermique** de turbulences dans des conditions chaudes n'est pas négligeable. Ainsi on définit ce terme par la relation :

$$\omega_* = [\frac{g}{T_{can}} Q_0 z_{bât}]^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

Ce terme dépend non seulement de la **hauteur moyenne** $z_{bât}$ des bâtiments (plus ils sont élevés plus la chaleur dans la rue sera importante) mais également du terme Q_0 qui englobe les flux de chaleur turbulents de la route et des parois.

A noter que l'ajout du terme de convection ω_*, qui prend en compte l'**ascendance d'air** due aux productions thermiques de turbulence, augmente la conductibilité aérodynamique et donc l'extraction de chaleur depuis les surfaces du canyon vers le haut de celui-ci.

Les autres résistances thermiques, R_{route} et $R_{\sup}$, dépendent respectivement de la stabilité à l'intérieur et au-dessus du canyon par les relations :

$$R_{route} = f(Ri, \frac{z_{bât}}{2}, U_{eff}, z_{0_{Mroute}}, z_{0_{Hroute}}) \quad (4)$$

$$R_{\sup} = f(Ri, z_{ref}, U, z_{0_{Mville}}, z_{0_{Hcan}}) \quad (5)$$

Ri est le **nombre de Richardson** (voir encadré). En effet lorsque les calculs concernent de **petites échelles**, une turbulence tridimensionnelle, due aux variations de la vitesse de l'air à petite échelle et à la stratification verticale de sa densité, induit une modification du bilan d'énergie de la turbulence considérée. L'importance relative de cette modification est caractérisée par le nombre de Richardson. Ici ces petites turbulences sont donc prises en compte dans l'espace séparant la route et le coeur du canyon dans la relation (4), puis dans l'espace séparant le coeur du canyon de la surface de la rue dans la relation (5) (voir figure 2).

$Zref$ est le **niveau de forçage**. En effet le modèle est limité dans l'espace, aussi bien horizontalement que verticalement. Aux frontières du TEB, les valeurs des différents paramètres de description de l'atmosphère sont calculées, afin que les prévisions du TEB servent pour un autre modèle plus grand : c'est le **forçage**. $Zref$ est donc l'altitude à laquelle se trouve cette frontière (en pointillés sur la figure 2).

U est la vitesse horizontale du vent à cette altitude.

$z_{0Mroute}$ est la **longueur de rugosité** (voir encadré) **aérodynamique** entre la route et l'atmosphère tandis que $z_{0Hroute}$ est sa **longueur de rugosité thermique**.

De même $z_{0Mville}$ est la longueur de rugosité aérodynamique à plus grande échelle de l'ensemble de la surface urbaine considérée par le modèle, et z_{0Hcan} est la longueur de rugosité thermique des routes du modèle.

A noter la grande différence entre les deux longueurs de rugosité : $z_{0M} >> z_{0H}$ (voir tableau ci-dessous).

Lewis Fry Richardson
(1881-1953)

Physicien anglais, il fut le premier à essayer de résoudre les équations primitives de prévision du temps de façon approchée avec les outils de calcul numérique. Ses travaux publiés en 1922 sont à caractère réellement prémonitoire.

Longueur de rugosité

- La longueur de rugosité $Z0$ définit le frottement de l'air au sol. Par exemple pour la longueur de rugosité aérodynamique $Z0M$, quand il n'y a pas d'effet thermique (chauffage ou refroidissement au sol), mais juste du vent, le profil de vent dans les premiers 30 mètres suit la loi suivante : $\boxed{\frac{dU}{dz} = \frac{u*}{kz}}$.

k est la **constante de Karman** (k=0.4), et $u*$ **est la vitesse de friction**, qui dépend du flux de quantité de mouvement et qui change donc en fonction des conditions atmosphériques. $u*$ sera considérée constante dans cet exemple pour les premiers 30 mètres.

- Par intégration, on obtient le profil de vent : $\boxed{U = \frac{u*}{k} \times \ln \frac{z}{z_0}}$ où la **constante d'intégration** $Z0$ est en fait une caractéristique de la surface : c'est la **longueur de rugosité aérodynamique**.

- La loi obtenue est valable de $20 \times z_0$ à quelques dizaines de mètres. En dessous, il faut prendre en compte les écoulements autour des obstacles et les frottements visqueux.

- La longueur de rugosité aérodynamique va de 1 mm pour la **neige** à 1 cm pour une **prairie**, 10 cm pour les **cultures développées**, et peut atteindre 1 à 2 m pour la **forêt** et plusieurs mètres pour les **villes**.

Une résistance thermique des toits R_{toit} est aussi calculée grâce à la relation :

$$R_{toit} = f(Ri, z_{ref}, U, z_{0_{Mtoit}}, z_{0_{Htoit}}) \quad (6)$$

Les longueurs de rugosité utilisées pour le modèle sont (en mètre) :

$Z0Mroute$	0.05	$Z0Mroof$	0.15
$Z0Hroute$	2.5 10^{-4}	$Z0Hroof$	7.5 10^{-4}

3) Simplification du système de résistances

Les interactions entre toutes ces résistances sont complexes. En effet on remarque sur la figure 2 que la température à la surface de la rue T_a dépend des deux résistances R_{toit} et $R_{\sup}$. $R_{\sup}$ dépend encore de R_{route} et R_{mur}. Toutes ces résistances dépendent de plus des diverses longueurs de rugosité vues précédemment qui dépendent elles-mêmes de très nombreux facteurs comme le type de surface (route, paroi, toit) ou la densité de la ville.

Pour mieux comprendre ce système de résistances qui va relier les différentes températures de surface à la température T_a à la surface de la rue, les températures de surface T_{Sroute}, T_{Smur} et T_{Stoit} vont être supposées **égales** à une température T_s, et les surfaces vont être supposées de **proportions égales**. Le système de résistances de la figure 2 équivaut alors à un circuit d'entrée T_s et de sortie T_a où les résistances sont branchées en série et en parallèle, comme le montre la figure 3.

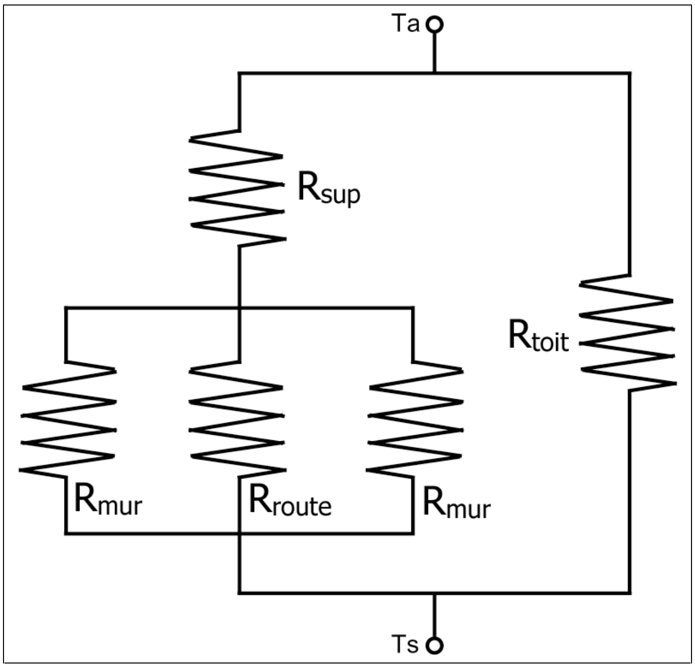


Figure 3 : Système simplifié des résistances thermiques.

Cette simplification permet d'avoir un **ordre de grandeur** de plusieurs paramètres, bien qu'elle soit assez éloignée de la situation réelle.

On observe en effet que sur le montage, R_{mur} **et** R_{route} **sont du même ordre de grandeur**, ce qui se traduit par le fait que la chaleur est aussi difficile à extraire de la route que des parois.

Ensuite en négligeant $R_{\sup}$, on peut calculer la résistance équivalente :

$$\frac{1}{\mathrm{R}_{eq}} = \frac{2}{R_{mur}} + \frac{1}{R_{route}} + \frac{1}{R_{toit}}, \text{ soit } \mathrm{R}_{eq} = \frac{R_{toit}R_{route}R_{mur}}{R_{route}R_{mur} + R_{toit}R_{mur} + 2R_{toit}R_{route}} \quad (7)$$

Or puisque R_{mur} et R_{route} (en parallèle) sont du même ordre de grandeur et que $R_{\sup}$ est négligée, R_{toit} branchée alors en parallèle se retrouve également du même ordre de grandeur. R_{toit} étant aussi du même ordre de grandeur que R_{eq} (voir figure 3), R_{eq} **est du même ordre de grandeur que** R_{toit}**,** R_{mur} **et** R_{route}.

De la même façon, puisque ces résistances sont liées aux différentes longueurs de rugosité thermique des surfaces auxquelles elles sont associées, on peut considérer que toutes les longueurs de rugosité thermique sont du même ordre de grandeur. Celle associée aux toits étant de 7.5 10^{-4} m et celle associée aux routes étant de 2.5 10^{-4} m, **la longueur de rugosité thermique totale** $Z0_{Hville}$ **associée à** R_{eq} **aura pour ordre de grandeur** $\mathbf{10^{-4}}$ **m**.